Pratique Supplémentaire 5

Cette série fait suite aux chapitres 2.2, 2.3, 3.1, 3.2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Remarques : il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

Exercice 1

Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^3 = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et que son inverse est donné par $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2$.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ pour les quelles les matrices suivantes sont inversibles. Ensuite, donner l'inverse de la matrice considérée pour ces valeurs de λ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Pour quelles valeurs de c_1, c_2, c_3 la matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \end{pmatrix}$$

Indication : Montrer que $\det A = (c_2 - c_1)(c_3 - c_1)(c_3 - c_2)$.

Exercice 4

a) Soient $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2$ est la même que l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{a}_2 + c\,\overrightarrow{a}_1$, où $c \in \mathbb{R}$ est un scalaire.

b) Montrer que si A est une matrice de taille 2×2, alors l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs colonnes de A est égale à $|\det A|$.
Indications : Se rappeler que $A = (A^T)^T$ *et que* $\det A^T = \det A$*, et essayer de se ramener au cas des matrices diagonales.*

Exercice 5

Calculer les déterminants suivants en utilisant le développement selon une ligne ou une colonne, et la méthode de Gauss d'échelonnage :

$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 6

Sachant que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$

calculer les déterminants

$$t = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Exercice 7

Calculer le volume du parallélépipède dont un sommet se trouve à l'origine et les trois sommets adjacents se trouvent en $(1, 4, 0)$, $(-2, -5, 2)$ et $(-1, 2, -1)$.

Exercice 8

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale. ☐ ☐

b) $\det A^T = -\det A$ pour toute matrice carrée A. ☐ ☐

c) Il se peut que l'inverse d'une matrice A existe même si $\det A = 0$. ☐ ☐

d) Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$. ☐ ☐

Exercice 10

a) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On forme la matrice C en multipliant la 3ème ligne de A par 5, puis la 2ème colonne de cette matrice par -3. On définit la matrice $D = C \cdot 2B$. Alors

☐ $\det D = 30 \det A \det B$;

☐ $\det D = -60 \det A \det B$;

☐ $\det D = 90 \det A \det B$;

☐ $\det D = -120 \det A \det B$.

b) Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On obtient la matrice C à partir de A en multipliant par 4 la matrice A, puis en échangeant les lignes 1 et 2. On obtient la matrice D à partir de B en multipliant par 4 la deuxième colonne et en ajoutant 4 fois la première colonne à la troisième.

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -4 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\det A \cdot (\det B)^{-1}$;

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\frac{1}{4} \det A \cdot (\det B)^{-1}$.

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications.* De Boeck, Bruxelles, 2005.